

RECENSIONI

Martha Isabel Fandiño Pinilla (2021). *Le frazioni: Matematica, storia e didattica*. Prefazioni di Athanasios Gagatsis, Carlos E. Vasco Uribe e Bruno D'Amore. Bologna: Pitagora.

Recensione di Massimo Ferri

Quando ho detto a un mio amico, non matematico ma intelligente, che stavo leggendo un libro sulle frazioni, le sue folte sopracciglia si sono alzate in modo eloquente. La domanda inespressa era: “Un intero libro sulle frazioni? C'è tanto da dire?”. Bene, se avete lo stesso dubbio vi consiglio di buttare subito un'occhiata al capitolo 5, dove Martha Fandiño Pinilla smonta ed esamina metodicamente ogni possibile concezione intuitiva di frazione: se vi sembrava che fosse un concetto tanto semplice e che fossero scemi i vostri allievi con i loro errori, adesso avete perso qualche ingannevole certezza.

Ora che siete corsi alla cassa e vi siete accaparrati questo gioiellino, potete ripartire dall'inizio. Le tre prefazioni vi confortano sul vostro acquisto, poi l'Autrice saggiamente pone le basi strettamente matematiche per la costruzione degli insiemi numerici pertinenti. Martha predispone un percorso semplificato per chi non ha una laurea in Matematica; sono convinto, però, che anche lettrici e lettori prudenti torneranno sui passi saltati in prima lettura: sono scritti in modo assai chiaro e dicono molto senza farlo pesare. Trovo opportuna la scelta di assegnare ai razionali non negativi il ruolo di protagonisti. Lo sfuggente concetto di “parti uguali” in cui dividere una altrettanto sfuggente unità viene attentamente considerato qui e per tutta l'opera. I cenni letterari e le osservazioni sulla notazione usata in altri paesi danno un respiro piacevole a questo capitolo formale.

Il secondo capitolo è un'approfondita (32 pagine!) analisi storica del concetto di frazione, ben contestualizzato e ad ampio raggio geografico; è un capitolo interessante per chi legge, ma lo sarà anche, a cascata, per gli allievi: il contesto storico, la faticosa evoluzione di un concetto lo rendono umano, affrontabile.

Terzo e quarto capitolo sono dedicati alle frazioni in ambito didattico e alle ricerche pertinenti; qui l'Autrice si preoccupa di chi non ha dimestichezza con la didattica come disciplina scientifica: ogni termine tecnico è segnalato con un asterisco, confortandoci se non ne abbiamo un immediato riscontro intuitivo e rimandandoci ai testi opportuni o al Capitolo 7. Per me (didatta sì, ma ruspante) sono i capitoli più ostici, però ci sono tutti i riferimenti bibliografici che possano soddisfare curiosità e necessità di maggiore comprensione.

Ho già accennato al quinto capitolo “Vari modi di intendere il concetto di ‘frazione’”, che trovo sorprendente e magnifico: Martha elenca 12 punti di vista comuni e due più tecnici. Qui nasce anche una prima analisi degli errori frequenti, trattati come preziose fonti d'informazione invece che storture mentali o frutto di pigra indifferenza.

Il Capitolo 6 chiarisce il significato di noetica e semiotica. Se avevo una certa idea del secondo termine, il primo mi era estraneo; e questo è paradossale, visto che ho dedicato decenni della mia vita proprio alla noetica, cioè all'apprendimento di concetti da parte mia e soprattutto dei miei studenti. L'Autrice ci mette davanti a una realtà scomoda: gli oggetti della matematica non esistono nella realtà; si possono appoggiare anche ampiamente a situazioni reali, ma sono eminentemente astratti. Al di là di motivazioni ed esempi concreti, giunti al dunque dobbiamo presentare ai discenti dei simboli e loro manipolazioni che speriamo convogliano un concetto. L'acquisizione di quelle rappresentazioni semiotiche garantisce il passaggio alla noetica, l'acquisizione del concetto o costituisce solo una elaborata illusione per noi e per loro? Le frazioni si prestano a fornire degli esempi lampanti di questo problema. Nota personale: qui finalmente mi è risultato chiaro cosa sono i "registri semiotici".

Nel settimo capitolo arriviamo al cuore del problema: gli errori; convergono qui le considerazioni e le analisi dei capitoli precedenti. Prima vengono esaminate le caratteristiche oggettive degli errori frequenti, ma poi si passa dall'osservazione alla costruzione di modelli, alla ricerca di spiegazioni. Si chiama metodo scientifico. Finalmente ho capito in cosa consiste il malefico "contratto didattico", cosa sono i "modelli parassiti". Come dopo tutte le spiegazioni azzeccate, viene da dire: è logico, naturale, come mai non ci ho pensato prima? Risposta: occorre che ci pensassero scientificamente degli esperti. Un utile ultimo capitolo tira le somme e azzarda, con prudenza e modestia, qualche suggerimento.

Ho imparato molto da questo libro. Dovrebbero leggerlo quelle "menti eccelse" che nei corridoi ridacchiano delle risposte assurde e contraddittorie dei loro allievi; non si accorgono, poveretti, che i malcapitati studenti hanno offerto loro delle strabilianti finestre su quei concetti che gli eccelsi credono di conoscere così bene. Martha Fandiño Pinilla ha confezionato uno studio accurato in ogni dettaglio, basato su un'ampia esperienza sul campo (sua e di altri), con 12 fitte pagine di bibliografia, con spunti di approfondimento matematico, psicologico, pedagogico. Va bene, è quello che ci si aspetta da un professionista! Ma c'è una qualità che va al di là delle aspettative, una qualità sempre più importante e sempre più rara: il rispetto.

Martha mostra un enorme rispetto per tutti: per il lettore in generale, per gli studenti soprattutto quando sbagliano, per la faticosa conquista, nei secoli, della conoscenza; importantissimo: per gli errori degli stessi docenti! Ha rispetto per il maestro che può avere difficoltà con strutture, passaggi a quoziente ecc.; ha rispetto per chi insegna (magari da decenni, come me!) ma non si era mai curato di imparare a farlo scientificamente. Ha rispetto per il bambino che non conteggia l'area di quello stretto pezzo di prato, perché la mucca di cui parla l'esercizio non ci può passare; anzi, ritiene questa un'osservazione fruttifera per il rapporto fra modello concreto e astrazione.

Questo bellissimo passo è, per me, quello che meglio rappresenta il rispettoso rapporto dell'Autrice con la matematica e con noi. Grazie, Martha!

Bruno D'Amore (2020). *La matematica nell'opera di Dante Alighieri: Spunti biografici a scopo didattico*. Prefazioni di Umberto Bottazzini ed Emilio Pasquini. Bologna: Pitagora.

Recensione di Mario Castellana

È da tenere presente che tra le diverse iniziative per celebrare i settecento anni della morte di Dante una certa attenzione da un po' di tempo si sta dando alla sua visione della scienza, tematica quasi del tutto assente nella critica letteraria di impronta crociana; ma per capirne meglio il ruolo che ha avuto nel percorso dantesco occorre prendere in considerazione il fatto che il tema dei rapporti fra arte e matematica, soprattutto, è diventato strategico nel corso del Novecento, già a partire con l'arte astratta inspiegabile se non si tiene presente la visione del mondo introdotta dalle geometrie non euclidee e dalla teoria degli insiemi di Cantor che, ben metabolizzate a livello artistico, hanno permesso di rinnovare *ab imis* linguaggi e stili. In seguito, nella seconda metà del secolo, la geometria dei frattali e poi la matematica delle tassellature, prima con Roger Penrose e ultimamente con Robert Fathaver nel suo importante lavoro del 2020 *Tessellations: Mathematics, Art and Recreation*, hanno riproposto con forza il tema dell'unità della cultura, il superamento del dilemma delle due culture, quella umanistica e quella scientifica, artificiosa divisione che solo in Italia, pur essendo stata la culla dell'Umanesimo e del Rinascimento dove scienza e arte erano strettamente connesse, ha raggiunto livelli a dir poco nefasti con conseguenze culturali e istituzionali ancora presenti e non facilmente superabili.

Non è un caso che il matematico Godfrey H. Hardy (1877–1947), sulla scia di Leonardo, abbia parlato di 'estetica matematica' col scrivere che "il matematico, come il pittore o il poeta, è un creatore di forme" e di simmetrie analoghe a quelle create in campo poetico e artistico, come anche lo stesso scrittore francese Paul Valéry aveva evidenziato nel suo continuo abbeverarsi alle stesse fonti, quelle di Leonardo e della matematica del suo tempo; se le forme in campo artistico si servono di parole, schizzi, pezzi e suoni, in campo matematico danno origine a idee ma tutte trovano nelle rugosità del reale e nell'esperienza del mondo il loro continuo nutrimento che poi costituiscono il *plafond* dell'unità della cultura che nessun sano pensiero filosofico può disconoscere. Alla luce di tali acquisizioni che hanno trovato una giusta collocazione anche in alcuni settori non marginali della stessa critica letteraria, non è un caso che, già nel 1995, uscì uno dei primi significativi lavori orientati in tal senso su *Dante e la scienza*, a cura di P. Boyle e V. Russo, dove i vari

contributi erano indirizzati a cogliere il ruolo e la funzione del mondo della scienza del suo tempo sino a parlare di ‘epistemologia di Dante’, se per epistemologia si vuole però intendere l’immagine della scienza in generale e così come essa si presentava nel variegato universo medievale. Dopo l’importante evento internazionale tenutosi nel 2015 a Friburgo con la pubblicazione dei relativi atti su *Dante e la critica letteraria: Una riflessione epistemologica* (a cura di T. Kleinkeit e A. Malzacher), è da tenere presente il più recente Focus dell’Ufficio Stampa del CNR, *Almanacco della Scienza: 1321-2021 Dante 700* (n. 22, dicembre 2020), dove diversi studiosi e scienziati si sono confrontati col mondo di Dante e la sua visione religiosa, politica e scientifica con illustrare finalità e modi di intendere la scienza cosmologica del suo tempo.

Questi studi nel loro complesso chiariscono meglio e ancora una volta che l’interesse di Dante per la scienza era funzionale alla sua concezione poetico-religiosa finalizzata a dare risalto alla divinità come fonte della creazione dove l’uomo “dee traere a le divine cose quanto può”; nello stesso tempo sottolineano il fatto che il poeta fiorentino era ben documentato sui dibattiti filosofico-scientifici del suo tempo sino a farsi quasi loro portavoce e a interrogarli nelle diverse pieghe col fare del pensiero aristotelico e della visione tolemaica del mondo una vera propria *Weltanschauung* chiaramente in senso poetico alla pari di quella di impronta teoretica presente nella *Summa Theologiae* dell’Aquinata.

In tale contesto viene a inserirsi, ma con una particolare attenzione verso le conoscenze matematiche possedute da Dante e con un approccio diverso, il recente lavoro del matematico e storico delle matematiche Bruno D’Amore, *La matematica nell’opera di Dante* (con prefazioni di Umberto Bottazzini ed Emilio Pasquini, Bologna, Pitagora Ed. 2020); già in diversi studi sulla *Divina Commedia*, come quello apparso nel volume del 1995 e di altri successivi, D’Amore ha spiegato la profonda simmetria di origine matematica che ne regge l’intero impianto dalle strutture geometriche dell’*Inferno* al complesso intreccio delle sfere, l’una dentro l’altra, del *Paradiso*. Tutto questo lungo e non comune percorso di continuo e contemporaneo abbeveramento alle fonti della matematica e dell’arte lo ha portato ultimamente a scrivere *Arte e Matematica* del 2015, lavoro dove si analizzano le metafore, le analogie e le identità ‘tra i due mondi’.

Impegnato per diverso tempo anche nel difficile ambito della didattica delle matematiche che gli ha permesso di sviscerarne meglio sul terreno storico-epistemologico le complesse concettualizzazioni che le hanno caratterizzate, D’Amore ci offre un lucido esempio di concreto superamento delle due culture nel senso che in quest’ultimo testo innanzitutto, per capire l’universo poetico ed esistenziale di Dante, si fa suo ‘contemporaneo’, come ha fatto Hélène Metzger negli anni ’20 di questo secolo nei confronti di alcuni scienziati come Newton e Lavoisier, per entrare nel vivo delle questioni e

dello spirito del tempo che visti alle luce del presente possono sembrare stravaganti e tipiche di un mondo prescientifico; ma soprattutto si fa narratore, quasi fedele compagno di viaggio di Dante e di Guido Cavalcanti nelle diverse città da Siena a Ravenna, li segue nelle taverne e negli accesi dibattiti avuti, nelle ‘dispute aperte’ in campo filosofico, nei diversi incontri con personaggi e figure come ad esempio Lauretta che gli ha permesso di avere delle preziose idee per affrontare il grosso problema della quadratura del cerchio quando stava per portare a termine la terza cantica. Seguono con uno stile non letterario le due appendici finali che affrontano la presenza dei matematici contemporanei di Dante da Paolo dell’Abaco e Pietro Hispano, le cui opere erano ben conosciute come quella sull’ottica che avranno un ruolo non secondario nella visione della luce nel *Paradiso*, a Guido Bonatto, Michele Scotto e Roberto Grossatesta e quella degli antichi da Pitagora, Euclide e Isidoro di Siviglia, e tematiche attinenti l’aritmetica e la probabilità, la logica formale e la geometria, l’incontro a volte non sulla stessa linea con le idee di Aristotele.

D’Amore, pertanto, ci offre uno spaccato poetico-scientifico non comune del mondo di Dante e nel farsi narratore dei suoi interessi e aspirazioni ne sviscera le diverse articolazioni, operazione che permette una particolare esegesi di alcuni passi della *Commedia* in quanto lo scopo del lavoro, pur con uno stile letterario, è quello di chiarire i problemi scientifici legati al testo dalla “magia della scrittura posizionale dei numeri” grazie all’incontro con le lezioni di Paolo dell’Abaco a quella delle leggi dell’ottica di Hispano, dalla logica modale studiata da ragazzo a quella dell’infinità dei numeri oggetto di ‘dispute aperte’ a Firenze dai “giovani aspiranti filosofi” nelle loro continue sfide davanti alle chiese; non a caso le pagine dedicate alla questione dell’infinito, croce e delizia secolari di poeti e matematici, sono quelle più pregnanti anche perché tale tema è stato affrontato nel *Convivio* dove si afferma che “1 numero quant’è in sé considerato, è infinito, e questo non potremo mai intendere”. D’Amore, nel sottolineare che solo a fine Ottocento G. Cantor ci regalò l’infinito attuale e la capacità di renderlo più abbordabile “all’occhio dell’intelletto”, si sofferma sul ruolo nella *Commedia* degli “angeli, tanti ma tanti angeli, angeli non infiniti ma certo di numero superiore a qualsiasi estro umano”; così pure ci aiuta a capire meglio il senso del dialogo con Lauretta e la soluzione poetica che Dante apporta al problema della stessa quadratura del cerchio nel XXXIII canto del *Paradiso* con l’espressione “Qual è il geomètra che tutto s’affige, per misurar lo cerchio, e non lo trova, pensando, quel principio ond’elli...”.

Così i diversi episodi che hanno come oggetto ‘angoli’, ‘triangoli’, ‘piramide’, ‘la taverna’, ‘gli asini che volano’, ‘la tabellina’, ‘Pitagora e l’armonia’ prendono in esame con piglio narrativo i dubbi, le difficoltà e le capacità di Dante di metabolizzare in senso poetico questioni secolari oggetto di discussione da parte dei matematici occidentali e anche il suo modo di

capire e di riconoscere i contributi apportati da altri popoli come “le figure degli Indi” e il modo con cui gli ‘infedeli’, gli arabi, siano arrivati a scrivere i numeri; questo ricco ventaglio di conoscenze del mondo delle matematiche e la capacità di farle dialogare in maniera armonica da una parte colle dinamiche del mondo poetico e dall’altra con le verità della fede da parte di Dante offre l’occasione a D’Amore di mettere in atto a sua volta un gioco della finzione non comune col raggiungere, come dice Umberto Bottazzini nella prefazione, un “felice equilibrio tra realtà storica e immaginazione”. In tal modo si rende il poeta fiorentino un fine interprete di quell’anima cosmopolitica di cui era portatore un certo Medioevo, dove culture diverse pur scontrandosi contribuivano a potenziare il patrimonio conoscitivo dell’umanità.

Questo modo particolare di ricordare Dante, di viverlo e soprattutto di attraversarlo da parte di Bruno D’Amore ce lo fa sentire più nostro, ce lo rende compagno di viaggio, un navigatore che ci avverte che le stesse acque della conoscenza non sono lineari ma frutto del continuo scontrarsi con le onde del reale, dove i problemi scientifici sono veri e propri problemi umani con tutto il loro corredo esistenziale e non avulsi dalla vita quotidiana; in tal modo le stesse inquietudini e titubanze di Dante di fronte ai misteri della vita le sentiamo nostre e la *Divina Commedia*, come ogni espressione artistica e scientifica, può essere vista come un continuo e sofferto prendere atto delle nostre miserie e fragilità, dei nostri limiti e nello stesso tempo della necessità di fare tentativi per uscirne pur sapendo razionalmente il più delle volte di rimanere sconfitti. Bruno D’Amore nell’entrare in comunione con Dante e le sue traversie, cioè le nostre, ci offre pertanto un percorso poetico-scientifico e insieme ermeneutico dove ragioni della vita e ragioni dell’arte-scienza non sono scisse, ma si incontrano coll’arricchirsi reciprocamente di ulteriori significati anche per l’uomo del XXI secolo, assetato soprattutto di testimonianze di vita coerente tra pensiero e azione come indicava Simone Weil, figura quest’ultima che potrebbe essere il novello Virgilio per chi voglia avventurarsi nei meandri dell’esistenza e costruire quella che chiamava ‘architettura dell’anima’.